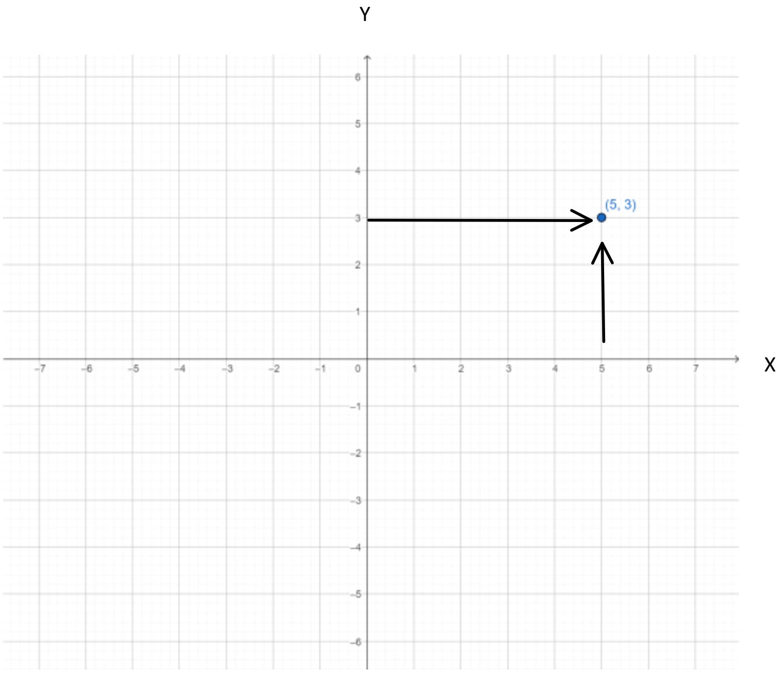
חקירת פונקציה קווית - הכירו את מערכת הצירים



ראשית כל, לפני ניתוח וחקירת פונקציה קווית, עלינו להכיר מהי מערכת צירים

מערכת צירים היא מסגרת ייצוג גרפי של ביטוי אלגברי מסוים, בה ישנם 2 צירים:
ציר x וציר y. לכל ציר יש 2 צדדים, המתחלקים בנקודה הנקראת ראשית הצירים. הצד הימני של ציר x מהווה ערכי x חיוביים, ואילו צידו השמאלי של הציר, מהווה ערכי x שליליים.
צידו העליון של ציר y מייצג ערכים חיוביים, ואילו צידו התחתון מהווה ערכי x שליליים.

על מנת לסמן ייצוג מסוים של ערכי x ו-y על מערכת הצירים, אנו ניעזר בנקודות.
תמיד נכתוב את הנקודות בצורה הבאה:
(x,y). אם יש ברשותנו את ערכי ה-x וה-y, נציב אותם במקומות הדרושים לקבלת נקודה. על מנת לסמן נקודת על אחד מן הצירים, אחד מערכי הנקודה יתבטל ויהיה שווה ל-0, כלומר, אם נרצה לרשום נקודה על ציר x, נכתוב (x,0).
אם נרצה לרשום נקודה על ציר y, נכתוב (0,y).

נוסחת משוואת הישר ומציאת נקודות חיתוך עם הצירים

כעת נכיר את הנוסחה המרכיבה את מה שאנחנו קוראים לו "פונקציה קווית":

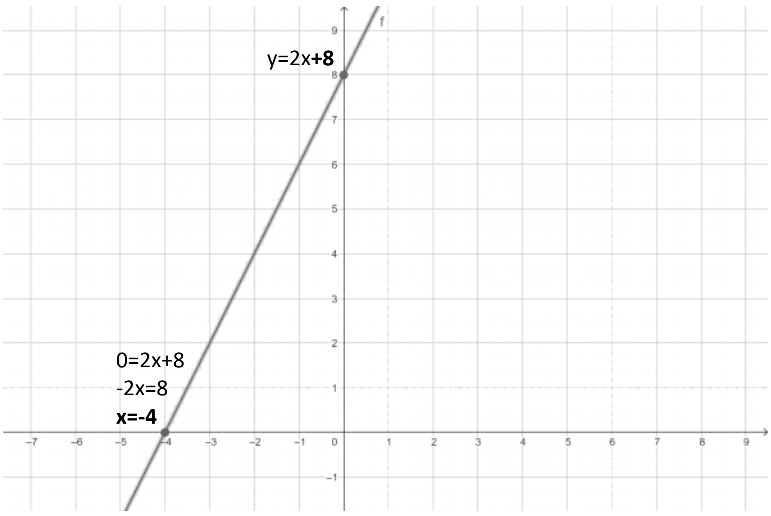
y=mx+b

m מייצג את המקדם של x והשיפוע של הפונקציה.
b מייצג את המספר החופשי ונקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר y.

על מנת למצוא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר y, עלינו בפשטות לבדוק מהו ה-b של הפונקציה. שימו לב! ה-b כולל גם את הסמן (+\-) שרשום לפני המספר.

על מנת למצוא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x, נציב במקום y, 0, וכך ניצור משוואה, שפתרונה יהיה נקודת החיתוך.

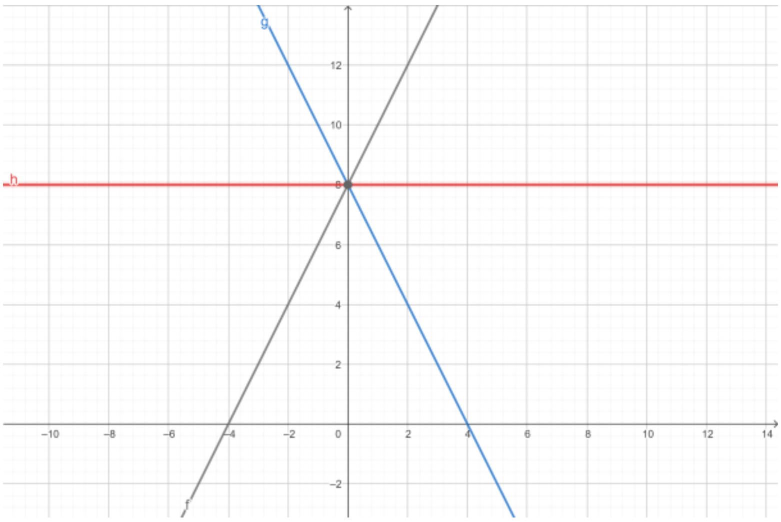
לפניכם דוגמת הפונקציה y=2x+8



אז מה למדנו עד כה?

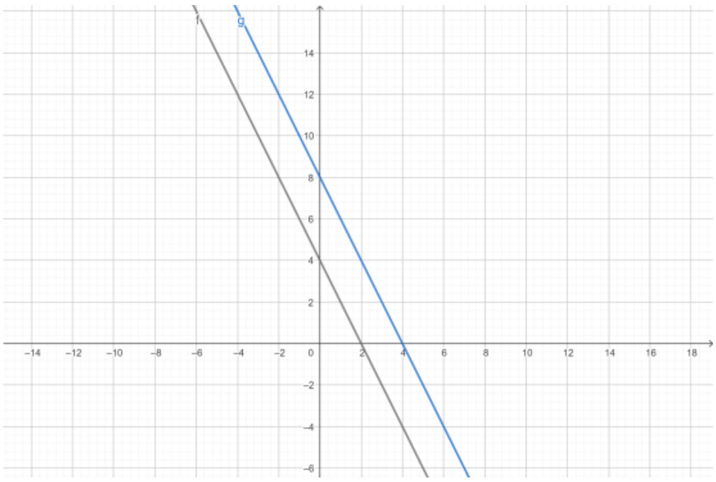
-מה היא מערכת צירים וכיצד היא בנויה
-סימון נקודות על מערכת צירים
-מבנה פונקציה קווית
-מציאת נקודות חיתוך של פונקציה עם הצירים

התאמת ייצוג אלגברי לייצוג גרפי



כעת נלמד כיצד להתאים ייצוג אלגברי של פונקציה, לייצוג גרפי של פונקציה.
כפי שראיתם ישנם כמה ייצוגים לפונקציה, אנו ניעזר בייצוג אלגברי (הנוסחה), ובייצוג גרפי (מערכת הצירים ומשוואת הישר).

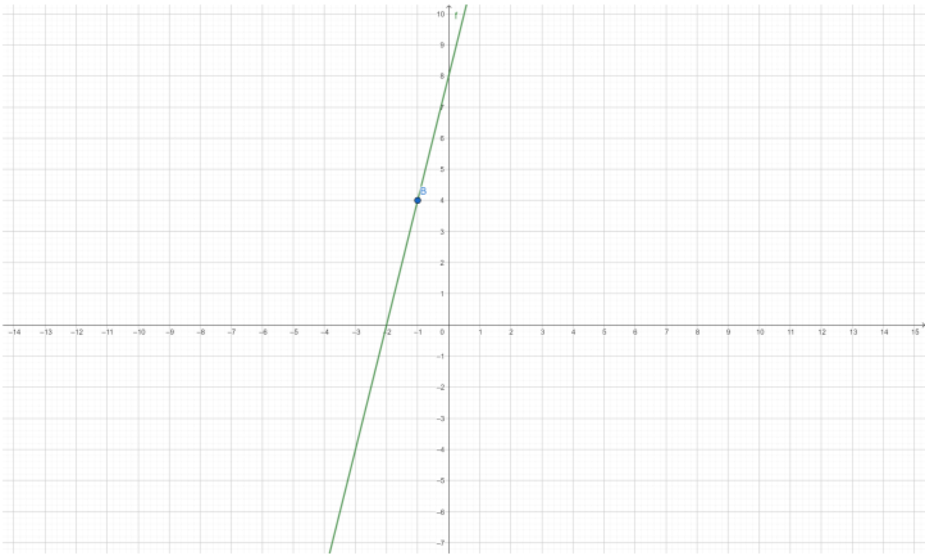
כל פונקציה שהשיפוע שלה (m) הוא חיובי, נקראת פונקציה עולה, כיוון שהיא נכתבת בגרף בצורת קו עולה מכיוון שמאל לימין (כביוון הכתיבה במתמטיקה\אנגלית).
כל פונקציה שהשיפוע שלה (m) הוא שלילי, נקראת פונקציה יורדת, כיוון שהיא נכתבת בגרף בצורת קו יורד מכיוון שמאל לימין.
סוג כתיבת פונקציה נוסף היוצא דופן מן השניים הללו, הוא כאשר השיפוע (m) שווה ל-0. כאשר השיפוע הוא 0, אין לנו בעצם נקודת חיתוך של הפונקציה עם ציר x, והפונקציה נכתבת כקו ישר העובר רק בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה-y.



אם כל הפונקציות הנתונות לנו בעלי שיפוע שלילי\חיובי\אפסי, נעבור לאופציה השנייה והארוכה יותר, הדורשת התאמה בין נקודות חיתוך ציר y, לבין ה-b של כל פונקציה. כלומר, אם הפונקציה שלי נגמרת ב-(+4), נקודת החיתוך של הפונקציה בייצוג גרפי עם ציר y תהיה 4.

בפונקציות לפניכם השיפועים שווים, אך מכיוון שה-b שונה, ניתן להבדיל בין הפונקציה שה-b שלה הוא 4, לבין הפונקציה שה-b שלה הוא 8.

בדיקת נקודה על המשך ישר



ישר עובר במספר נקודות על מערכת הצירים. לכל נקודה יש ישר שעובר בה, וכל ישר יש נקודה שבה הוא עובר.

על מנת לבדוק אם ישר עובר בנקודה ספציפית, הנתונה לנו, אנו נציב את נתוני הנקודה בפונקציה, ואם מתקיים שוויון בין 2 צדדי הפונקציה, הישר אכן עובר באותה הנקודה.

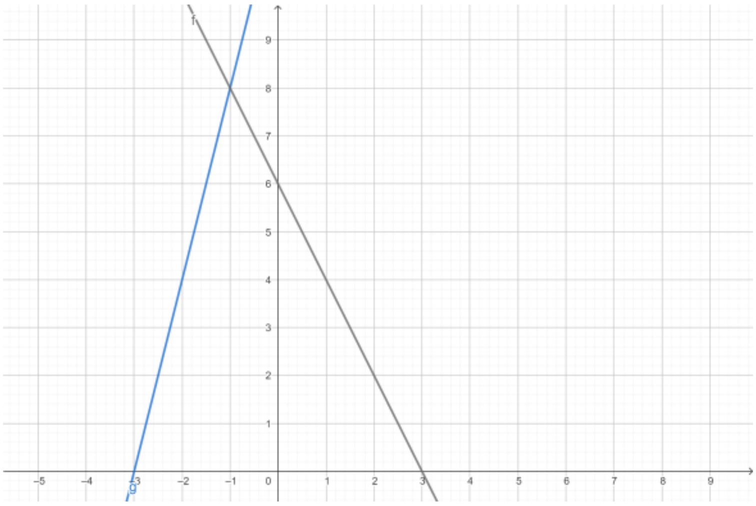
לדוגמה, הישר y=4x+8 והנקודה B=(-1,4).

כעת נציב את הנקודה במשוואה:

4=4*-1+8
4=-4+8
4=4

הגענו לשוויון, ולכן, הנקודה נמצאת על הישר.

מציאת נקודת חיתוך בין ישרים



לעיתים אנו עלולים להיתקל בחיתוך של שני ישרים, היוצרים נקודת מפגש ביניהם. על מנת למצוא את ערכי הנקודה הזו, עלינו לוודא כי 2 הפונקציות נתונות לנו בייצוג אלגברי, ואם הן לא, עלינו למצוא אותן לפי שאר הנתונים.

על מנת למצוא את ערך ה-x בנקודה, אנו נשווה את הפונקציות, לקבלת ערך משותף. השוואת הפונקציות, היא בעצם בניית משוואה לכל דבר, שהפתרון אליה, הוא ערך ה-x בנקודה.

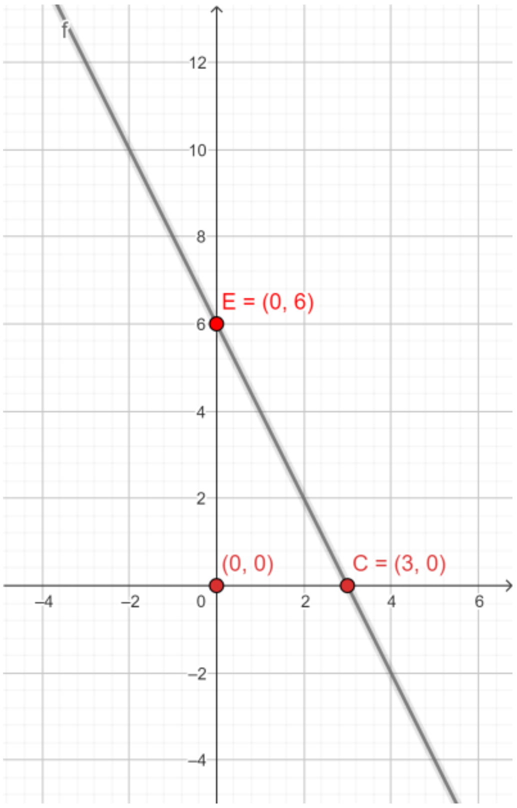
לדוגמה:
f(x)=-2x+6
g(x)=4x+12

נערוך משוואה: f(x)=g(x) או כפי שנרצה לכתוב: -2x+6 = 4+12
לאחר שפתרנו את המשוואה, נקבל את הפתרון: x=-1, כלומר הנקודה שלנו נכון לעכשיו, היא (-1,y).

כעת, על מנת למצוא את ה-y, נציב את 1- בתור ה-x של אחת הפונקציות.
שימו לב! על מנת לוודא כי הצלחתם למצוא את ערכו הנכון של x יש להציב את ערכו ב-2 הפונקציות, ואם התוצאה זהה, הערך שפתרתם נכון.

נציב את x=-1 בפונקציה f(x): f(x)=4*-1+12. פתרון המשוואה יהיה f(x)=8, מכיוון ש-f(x) הוא ייצוג נוסף ל-y, אז ערכו של ה-y בנקודה הוא 8.
לכן נקודת מפגש וחיתוך הישרים היא (-1,8).

חישוב שטח משולש הנוצר מישר החותך את 2 הצירים



כפי שניתן לראות, כאשר יש ישר או אפילו כמה ישרים במערכת צירים, הבנויה מזווית ישרה (בין ציר x לציר y), עשויים להיווצר משולשים או מצולעים אחרים. הדרך הראשונה לפתרון שטח משולש על מערכת משוואות היא במקרה ויש לנו רק ישר אחד.

מכיוון שישר חותך את 2 הצירים, נוצר משולש מ-3 קודקודים: ראשית הצירים, נקודת החיתוך עם ציר x, ונקודת החיתוך עם ציר y. מכיוון שבין הצירים יש זווית ישרה, אנו נחשב ניצב*ניצב חלקי 2. או אם נרצה לבנות משוואה לכך:

$$\frac{ab}{2} = S\Delta \mathrm{ed}o$$

a ו-b מייצגים את אורכי הניצבים, האות S מייצגת את המושג "שטח", והמשולש מסמן את המשולש לו השטח שייך. שימו לב! נקודה o במשולש מייצגת את ראשית הצירים (סימון רשמי).

לדוגמה, ניעזר בפונקציה y=-2x+6

הפונקציה יוצרת בעזרת הצירים משולש הנוצר מ-3 נקודות: נקודה A=(0,6), נקודה B=(3,0) ונקודה O=(0,0).

*מכיוון שאחד מקודקודי הפונקציה הוא ראשית הצירים, המשולש הופך אוטומטית למשולש ישר זווית. על מנת לחשב את השטח, נחשב 3*6 חלקי 2. התשובה שנקבל תהיה 9, ולכן:*

$$\frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = \mathbf{9} = \boldsymbol{S\Delta ABO}$$

אם לא נתונה לנו יחידת המידה, נרשום 9 יח"ר (יחידות מידה רבועות).

מציאת פונקציה מ-2 נקודות נתונות

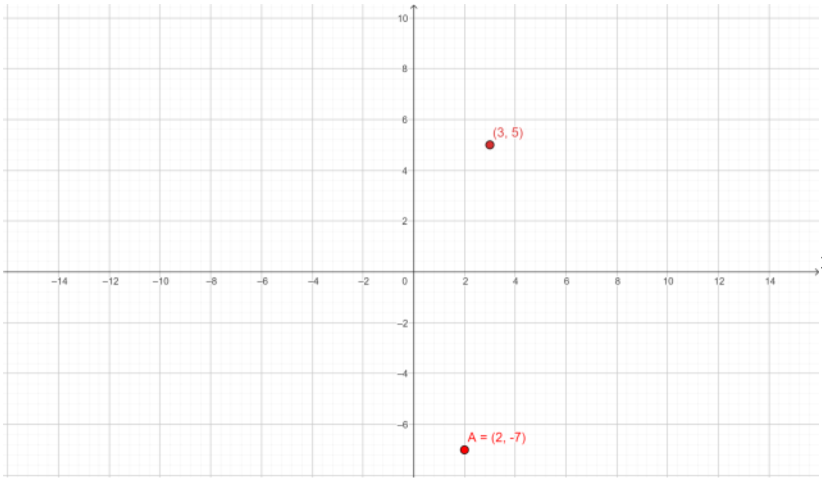
בנושא זה אנו נכיר את נוסחת מציאת השיפוע, ונבין כיצד להשתמש בה.

לעיתים אנו עשויים להתבקש למצוא פונקציה, העוברת ב-2 נקודות נתונות. על מנת לעשות זאת אנו צריכים להציב את ערכי הנקודות בנוסחת מציאת השיפוע הבאה:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

שימו לב! סדר ההצבה ע"פ הנקודות אינו משנה, אך עליכם להשתמש בסדר שבחרתם להשתמש בו בכל ההצבות.

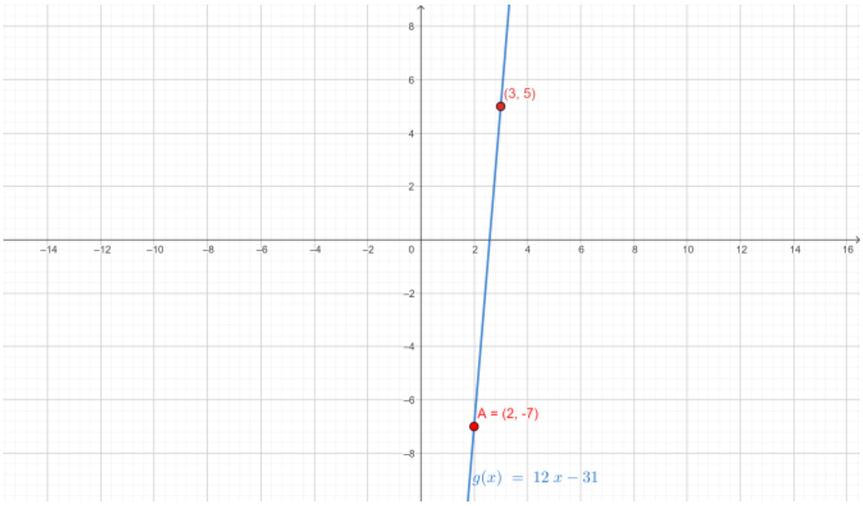
לאחר שמצאנו את השיפוע של הפונקציה, נציב אותו בנוסחת הפונקציה, ויחד איתו נציב גם את אחת מן הנקודות הנתונות (אין חשיבות לאיזו מהן), ונגלה את b, בכך שניצור משוואה.



ניקח לדוגמה את הנקודות הבאות:
(3,5) ו-(2,-7)

נציב את הנקודות בנוסחת מציאת השיפוע:

$$m = \frac{5-(-7)}{3-2}$$



לבסוף נגיע למסקנה כי m=12.

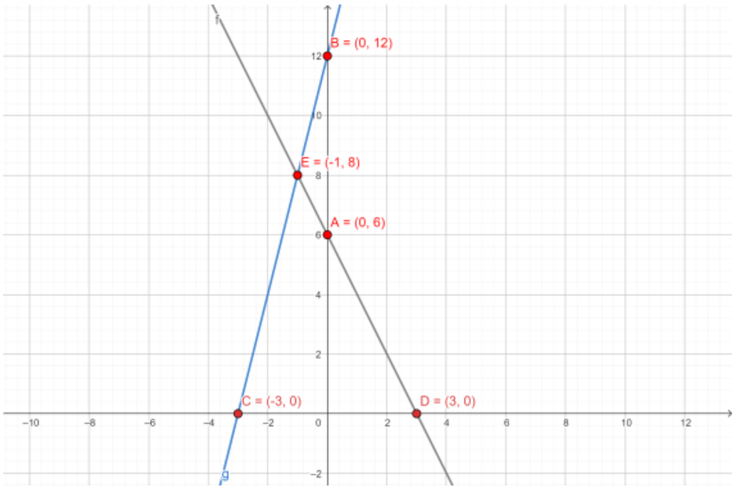
כעת נציב את השיפוע יחד עם הנקודה (3,5) בנוסחת הפונקציה:

$$5 = 12 \cdot 3 + b$$

מה שעשינו בעצם היה יצירת משוואה שפתרונה הוא b=-31

לכן, הפונקציה העוברת ב-2 הנקודות הנתונות היא **y=12x-31**

חישוב שטח משולש הנוצר מכמה ישרים



נוסף לשיטה זו, אנו נעזרים גם בשיטת הישרים המרובים. על מנת להיעזר בשיטה זו, אנו צריכים לוודא כי נתונים לנו כל הפונקציות בשרטוט, נקודות החיתוך עם הצירים, ונקודת החיתוך בין הישרים.

שימו לב! נקודות החיתוך של הישרים עם הצירים ואחד עם השני הן המרכיבים החשובים ביותר למציאת השטח.

כעת נרשום נוסחה למציאת השטח:

$$\frac{hb}{2} = s$$

האות h מסמלת את הגובה של המשולש, ואילו האות b מסמלת את בסיס המשולש.

לדוגמה ניעזר בפונקציות הבאות:

g(x)=4x+12

f(x)=-2x+6

אם נסתכל בסרטוט, נוכל להבחין כי נוצרו מספר משולשים. על מנת למצוא את שטח משולש ECD, עלינו למצוא את הגובה והבסיס. כפי שניתן לראות בנקודה E, גובה המשולש הוא 8. כעת ננסה למצוא את אורך הבסיס (צלע CD). על מנת לעשות זאת נחשב את המרחק בין 2 הנקודות, תוך היעזרות בצירים. אם נחשב את זה, המרחק בין 3- לבין 3 הוא 6.

כעת נחשב: $\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = \mathbf{24} = \boldsymbol{S\Delta ECD}$

פעם נוספת, נסמן לאחר ערך שטח המשולש את המילה יח"ר, במקרה ואינה קיימת יחידת מידה נתונה לנו.

תחום חיוביות ותחום שליליות

אנו נעזרים בתחום חיוביות ושליליות, כדי לקבוע מאיזו נקודה ערכי הפונקציה שליליים (מתחת ל-0), ומאיזו נקודה ערכי הפונקציה חיוביים (מעל ל-0).

2 דגשים חשובים למציאת תחום חיוביות שליליות:

1. יש לשים לב לאפיון הפונקציה (עולה, יורדת, קבועה)
2. יש לכתוב את התחום כאי שוויון, גדול או קטן. שימו לב: אם הינכם מתבקשים למצוא תחום חיוביות\שליליות בלבד, אל תכתבו גדול שווה, או קטן שווה, כיוון שהוספת השוויון כוללת גם את הערך בו הפונקציה מתאפסת.

אנו נלמד 2 דרכים למציאת תחום חיוביות ושליליות. הדרך הראשונה, והקלה, אך בעלת כמות הטעויות השכיחה ביותר, היא בחינת נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x, ויצירת תחום החיוביות\שליליות דרך היגיון בריא.

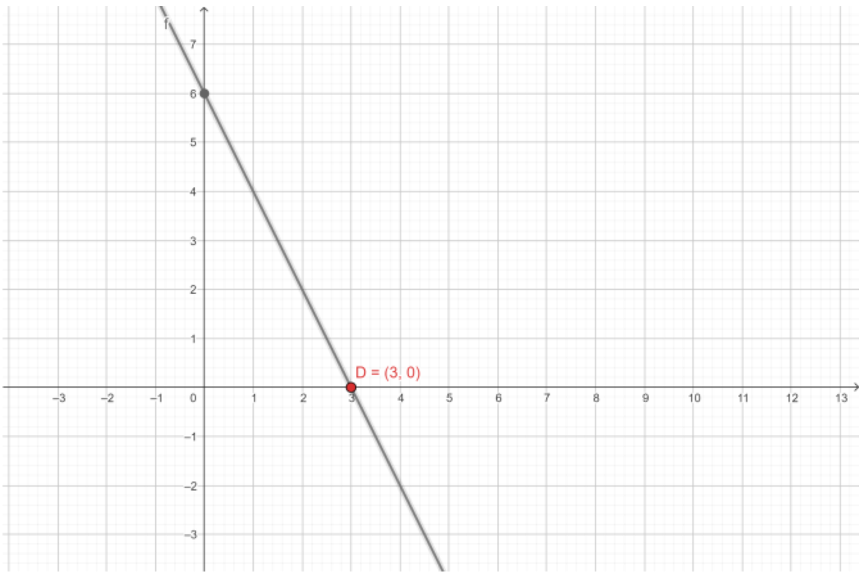
איך עושים זאת - ברגע שיש לנו את הפונקציה, מספיק משורטטת, ואת נקודת החיתוך שלה עם ציר x, אנו פשוט נבדוק מתי הערכים שליליים\חיוביים.

אם הפונקציה עולה, תחום החיוביות שלה יהיה איקס גדול מערך הנקודה.

אם הפונקציה יורדת, תחום החיוביות שלה יהיה איקס קטן מערך הנקודה.

על מנת למצוא את תחום השליליות פשוט נהפוך את הסימן.

לדוגמה הפונקציה f(x)=-2x+6. על מנת למצוא את תחום החיוביות שלה, נבדוק את השיפוע שלה: שלילי. לכן הפונקציה היא יורדת, והסימן שנכתוב יהיה קטן מ-, ולא גדול מ-. לאחר מכן, נבחן את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x. קיבלנו כי נקודת החיתוך היא (3,0), ולכן, תחום החיוביות של הפונקציה הוא $x<3$.
על מנת למצוא את תחום השליליות של הפונקציה, נהפוך בפשטות את הסימן, ולכן תחום השליליות של הפונקציה הוא $x>3$.



הדרך השנייה למציאת תחום חיוביות ושליליות, היא בניית אי שוויון, שמוכיח בסופו ממה x צריך להיות גדול\קטן על מנת שערכי הפונקציה יהיו שליליים\חיוביים.

ננסה שוב עם הדוגמה של הפונקציה f(x)=-2x+6:

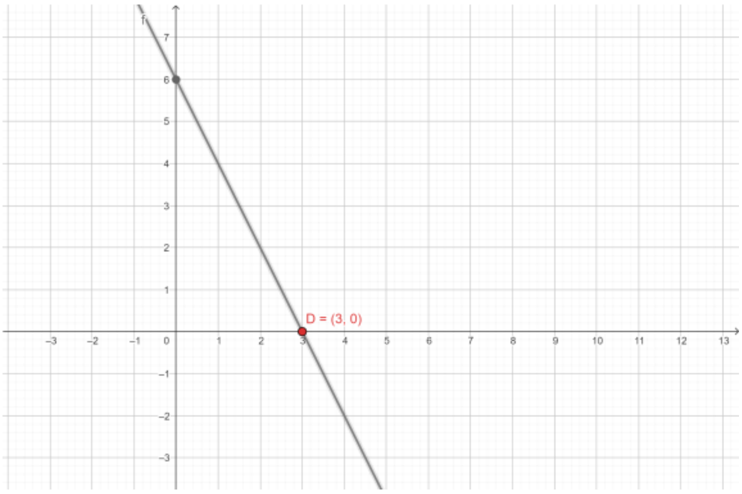
אם נרצה לחשב את תחום החיוביות:

$$-2x+6>0$$
נעביר את 2x- אגף, ונקבל כי x<3 הוא תחום החיוביות של הפונקציה

אם נרצה לחשב את תחום השליליות:

$$-2x+6<0$$
נעביר את 2x- אגף, ונקבל כי x>3 הוא תחום השליליות של הפונקציה.

מציאת איפוס הפונקציה



נוסף לתחום החיוביות והשליליות של פונקציה, יש גם את תחום האיפוס של הפונקציה. על מנת למצוא אותו, עלינו לבצע את אות התהליך של מציאת תחום חיוביות שלילות, אך במקום לרשום גדול\קטן, נרשום סימן שוויון בין הפונקציה ל-0.

ניקח לדוגמה את f(x)=-2x+6.
על מנת **מתי** f(x)=-2x+6 שווה ל-0, עלינו ליצור משוואה:

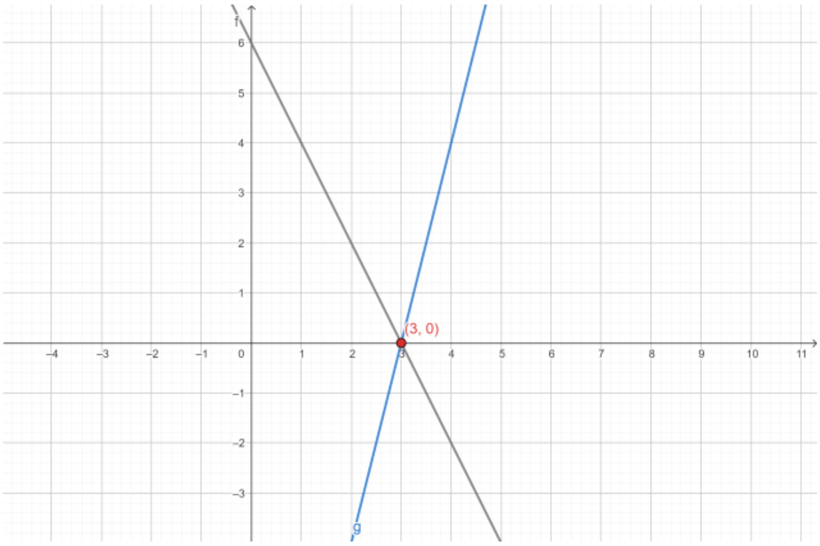
-2x+6=0
לאחר שנעביר אגף, נקבל כי הפונקציה f(x)=-2x+6 מתאפסת כאשר x=3.

נוסף על מציאת ערך איפוס פונקציה, אנו זקוקים לעיתים גם למצוא את הנקודה בה הפונקציה מתאפסת. על מנת למצוא את הנקודה, עלינו להציב 0 במקום ה-y, או במקרה שלנו: f(x).

0=-2x+6
מצאנו כמובן כי x=3 ולכן נכתוב זאת בנקודה: (3,y). כעת נציב את ערכו של x בפונקציה, כדי למצוא את ערכו של y

f(x)=-2*3+6
אנו מקבלים כי y=0, ולכן הנקודה בה הפונקציה מתאפסת היא (3,0).

מציאת תחום עליון של ערכי פונקציה אחת על השנייה



במקרה ויש לנו 2 ישרים, ואנו רוצים לדעת מתי ערכי אחד מהם גדול מערכי השני, אנו ניצור ביניהם אי שוויון, בהתאם לדרישת המשימה.

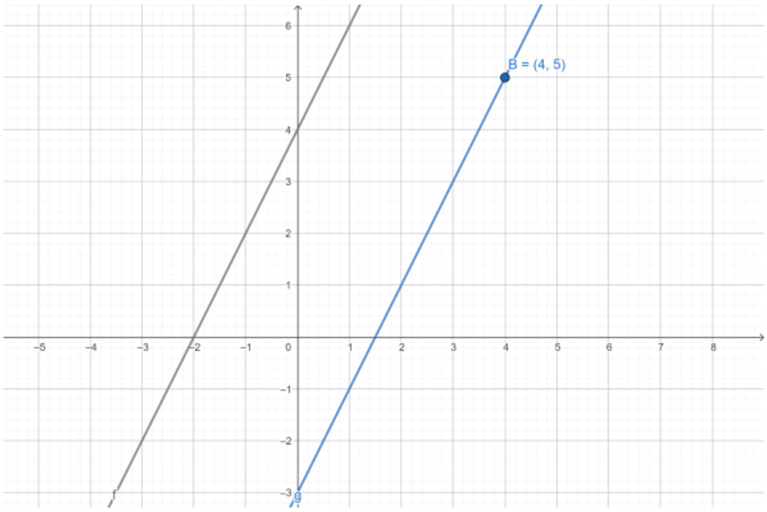
אם נרצה למצוא מתי ערכי הפונקציה f(x) גדולים מן ערכי הפונקציה g(x), נכתוב את אי השוויון כך:
$f(x) > g(x)$

אם ידועים לנו הייצוגים האלגבריים של הפונקציות, נציב אותם במקומם.

לדוגמה:
f(x) = -2x+6
g(x)= 4x-12

$-2x + 6 > 4x - 12$
בסוף לאחר פתרון אי השוויון נקבל כי x<3. כלומר: ערכי הפונקציה f(x) גדולים מערכי הפונקציה g(x) כאשר x<3.

ישרים מקבילים ומציאת פונקציה באמצעות שיפוע ונקודה נתונים



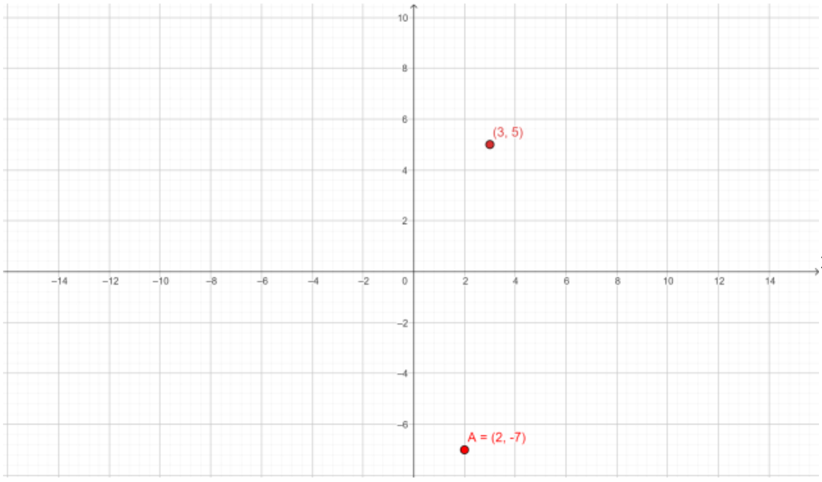
הסבר קצר על ישרים מקבילים: אם נתון לנו כי ישנה פונקציה מקבילה לפונקציה נתונה, השיפוע של שתיהן יהיה שווה.
לכן, אם נתונה לנו פונקציה f(x)=2x+4, ונקודה שערכה הוא **(4,5)**, אנו נוכל למצוא פונקציה חדשה, אך רק בתנאי שאותה הפונקציה נתונה כמקבילה לפונקציה f(x), ועוברת בנקודה, אותה נסמן ב-C. אז אם נסדר את הנתונים:
m=2
x=4
y=5
אם נציב את הנתונים הללו בנוסחת משוואת הישר, נקבל בי 5=2*4+b.
אם נפתור את המשוואה שיצרנו, נקבל כי b=-3, כך תיווצר הפונקציה הבאה: g(x)=2x-3.
מה שעשינו כרגע נקרא "מציאת פונקציה בעזרת שיפוע ונקודה נתונים".

מציאת פונקציה מ-2 נקודות נתונות

בנושא זה אנו נכיר את נוסחת מציאת השיפוע, ונבין כיצד להשתמש בה.

לעיתים אנו עשויים להתבקש למצוא פונקציה, העוברת ב-2 נקודות נתונות. על מנת לעשות זאת אנו צריכים להציב את ערכי הנקודות בנוסחת מציאת השיפוע הבאה:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



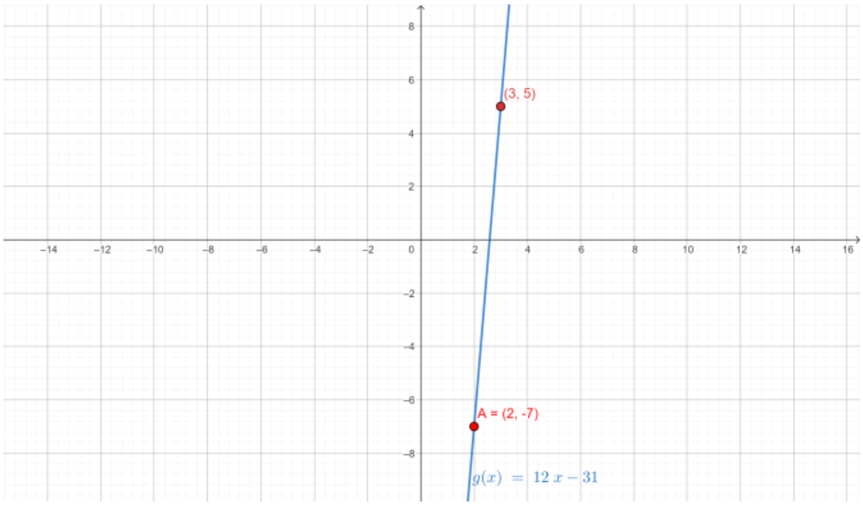
שימו לב! סדר ההצבה ע"פ הנקודות אינו משנה, אך עליכם להשתמש בסדר שבחרתם להשתמש בו בכל ההצבות.

לאחר שמצאנו את השיפוע של הפונקציה, נציב אותו בנוסחת הפונקציה, ויחד איתו נציב גם את אחת מן הנקודות הנתונות (אין חשיבות לאיזו מהן), ונגלה את b, בכך שניצור משוואה.

ניקח לדוגמה את הנקודות הבאות:
(3,5) ו-(2,-7)

נציב את הנקודות בנוסחת מציאת השיפוע:

$$m = \frac{5 - (-7)}{3 - 2}$$



לבסוף נגיע למסקנה כי m=12.

כעת נציב את השיפוע יחד עם הנקודה (3,5) בנוסחת הפונקציה:

$$5 = 12 \cdot 3 + b$$

מה שעשינו בעצם היה יצירת משוואה שפתרונה הוא b=-31

לכן, הפונקציה העוברת ב-2 הנקודות הנתונות היא **y=12x-31**

אז מה למדנו על חקירת פונקציות?

סיכום זה הקנה לכם מספר מיומנויות שישמשו אתכם בעת מענה על מבחן או משימות כיתה בנושא חקירה מלאה של פונקציה קווית.

-הכרנו את מערכת הצירים
-הכרנו את נוסחת הפונקציה: המבנה של כל פונקציה
-למדנו כיצד הייצוג האלגברי של פונקציה תורם לזיהוי הייצוג הגרפי
-למדנו כיצד לוודא ולמצוא נקודה המהווה ערך על הישר
-למדנו כיצד לאתר נקודות חיתוך של ישרים עם הצירים, תוך שימוש בהיגיון ודרך אלגברית
-למדנו כיצד למצוא נקודת חיתוך ומפגש בין שני ישרים, המהווה ערך שוויון ביניהם
-למדנו לחשב שטח למשולשים הנוצרים באמצעות צירי המערכת והישר הנתון, וגם לחשב שטח למשולשים הנוצרים באמצעות יותר מישר אחד-
-למדנו כיצד למצוא תחום חיוביות, תחום שליליות, תחום אפס, ותחומי ערך עליון\תחתון בין 2 פונקציות
-למדנו כיצד למצוא ייצוג אלגברי שלם באמצעות ישר מקביל ונקודה נתונים, או מציאת הייצוג האלגברי באמצעות 2 נקודות נתונות אשר בהם הישר עובר